

الموضوع الثاني:التمرين الأول:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
 (2) عين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5.
 (3) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
 $2^{4n} - 1$ مضاعف للعدد 5.
 (4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
 $2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0 [5]$

التمرين الثاني:

- (u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:
 $u_2 = 4$
 حيث:
 $u_5 \times u_7 = 4096$
 (1) أحسب u_6 ثم الأساس q .
 (2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 (3) أحسب المجموع S_n بدلالة n ، حيث:
 $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$
 (4) علما أن: $2^8 = 256$
 - عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 1020$.

التمرين الثالث:

- نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ:
 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
 ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
 (2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 (3) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
 (4) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :
 $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$
 (5) استنتج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل.
 (6) أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{1}{2}$.
 (7) أنشئ (C) و (Δ) في المعلم السابق.

تصحيح الموضوع الثاني:التمرين الأول:

- (1) ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:
 $2^0 \equiv 1 [5]$ من أجل $n = 0$
 $2^1 \equiv 2 [5]$ من أجل $n = 1$
 $2^2 \equiv 4 [5]$ من أجل $n = 2$
 $2^3 \equiv 3 [5]$ من أجل $n = 3$
 $2^4 \equiv 1 [5]$ من أجل $n = 4$
 نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

ونكتب:

$$\begin{cases} 2^{4k} \equiv 1 [5] \\ 2^{4k+1} \equiv 2 [5] \\ 2^{4k+2} \equiv 4 [5] \\ 2^{4k+3} \equiv 3 [5] \end{cases}$$

ومنه:

- بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.
- بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 2.
- بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.
- بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 3.

- (2) نعين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5:

لدينا:
 $1432 \equiv 2 [5]$
 $1432^{2013} \equiv 2^{2013} [5]$ حسب خواص الموافقات:
 $1432^{2013} \equiv 2^{4 \times 503 + 1} [5]$ ونكتب:
 $2^{4k+1} \equiv 2 [5]$ ولدينا:

حسب خاصية التعدي ينتج:

$$1432^{2013} \equiv 2 [5]$$

ومنه باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5 هو 2.

- (3) نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2^{4n} - 1 \text{ مضاعف للعدد } 5.$$

$2^{4n} - 1$ مضاعف للعدد 5 يعني أن $2^{4n} - 1$ يقبل القسمة على 5.
 أي:

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 [5]$$

نسمي الخاصية $P(n)$ التالية: $P(n) : 2^{4n} - 1 \equiv 0 [5]$
 من أجل $n = 0$ نجد:
 $0 \equiv 0 [5]$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 [5]$$

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

أي:

$$2^{4(n+1)} - 1 \equiv 0 [5]$$



لدينا من الفرضية:

$$2^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{5} \dots (1)$$

ولدينا:

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \dots (2)$$

نضرب (1) في (2) ينتج:

$$(2^{4n} - 1)2^4 \equiv 0 \times 1 \pmod{5}$$

بالنشر ينتج:

$$2^{4n} \times 2^4 - 2^4 \equiv 0 \pmod{5}$$

ونكتب:

$$2^{4n+4} - 2^4 \equiv 0 \pmod{5}$$

أي:

$$2^{4(n+1)} - 2^4 \equiv 0 \pmod{5}$$

وبما أن:

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

فإن:

$$2^{4(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

إذن العدد $2^{4n} - 1$ مضاعف للعدد 5.

(4) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

لدينا:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4 \times 103} + 2^{2(4n+1)} - 5 \pmod{5}$$

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 2^{4 \times 103} + (2^{4n+1})^2 - 5 \pmod{5}$$

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + (2)^2 - 5 \pmod{5}$$

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 1 + 4 - 5 \pmod{5}$$

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 5 - 5 \pmod{5}$$

ومنه نجد:

$$2^{412} + 2^{8n+2} - 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:

$$u_2 = 4$$

حيث:

$$u_5 \times u_7 = 4096 \dots (1)$$

(1) نحسب u_6 ثم الأساس q :

نكتب كلا من u_5 و u_7 بدلالة u_6 .

لدينا:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_6 = u_5 \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_5 = \frac{u_6}{q} \end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_5 = \frac{u_6}{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_7 = u_6 \times q \\ u_5 = \frac{u_6}{q} \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج:

$$u_6^2 = 4096$$

$$u_6 = -64 \text{ أو } u_6 = 64$$

نجد:

بما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$u_6 = 64$$

لدينا:

$$u_6 = u_2 \times q^4$$

$$q^4 = \frac{u_6}{u_2}$$

ومنه:

$$q^4 = 16$$

بعد التعويض نجد:

$$q^4 = (-2)^4 \text{ أو } q^4 = 2^4$$

ونكتب:

$$q = -2 \text{ أو } q = 2$$

نجد:

وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة فإن:

$$q = 2$$

(2) نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_2 بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_2 \times q^{n-2}$$

بعد التعويض نجد:

$$u_n = 4 \times 2^{n-2}$$

$$u_n = 2^2 \times 2^{n-2}$$

ونكتب:

ومنه نجد:

$$u_n = 2^n$$

(3) نحسب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

تعطى عبارة مجموع حدود متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود} - 1}{\text{الأساس} - 1} \times \text{الحد الأول في المجموع}$$

ويعطى عدد الحدود بالعلاقة التالية:

$$1 + \text{دليل الحد الأول في المجموع} - \text{دليل الحد الأخير في المجموع} = \text{عدد الحدود}$$

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_2 .

- الأساس هو q .

- عدد الحدود هو $n - 1$.

$$S_n = u_2 \times \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \quad \text{ومنه:}$$

$$S_n = 4 \times \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \quad \text{بالتعويض:}$$

ومنه نجد:

$$S_n = 4(2^{n-1} - 1)$$

(4) علما أن: $2^8 = 256$.

- نعين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 1020$.

$$S_n = 1020 \quad \text{نحل في } \mathbb{N} \text{ المعادلة:}$$

$$4(2^{n-1} - 1) = 1020$$

أي:

$$2^{n-1} - 1 = 255$$

بالاختزال:

$$2^{n-1} = 256$$

أي:

$$2^8 = 256$$

حيث:

$$2^{n-1} = 2^8$$

ومنه:

$$n - 1 = 8$$

بالمطابقة نجد:

ومنه:

$$n = 9$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

حيث:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

(3) نبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها:

نحسب الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ حيث: $f''(x) = 12x - 6$ ومنه نكتب:

$$f''(x) = 6(2x - 1)$$

نحل في \mathbb{R} المعادلة: $f''(x) = 0$
أي: $2x - 1 = 0$
ومنه نجد:

$$x = \frac{1}{2}$$

نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ فنجد:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف w هي:

$$w\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

(4) نتحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$$

ننشر العبارة $(x - 1)(2x^2 - x - 1)$ فنجد:

$$(x - 1)(2x^2 - x - 1) = 2x^3 - x^2 - x - 2x^2 + x + 1$$

بعد الاختزال والترتيب نجد:

$$(x - 1)(2x^2 - x - 1) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

إذن من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$$

(5) استنتاج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل:

نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

أي: $(x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0$
ومنه:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$

أي: $x = 1$

ولدينا: $2x^2 - x - 1 = 0$

نحسب المميز Δ فنجد: $\Delta = 9$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

وبالتالي:

(C) يقطع محور الفواصل في النقطتين A و B حيث:

$$A(1; 0) \text{ و } B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

(1) نعين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

• نحسب نهاية f الدالة عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3)$$

ناخذ نهاية أكبر أس:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• نحسب نهاية f الدالة عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3)$$

ناخذ نهاية أكبر أس:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:

• ندرس تغيرات الدالة f :

- نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

لدينا:

ومنه نجد:

$$f'(x) = 6x(x - 1)$$

- ندرس إشارة $f'(x)$:

نحل في \mathbb{R} المعادلة: $f'(x) = 0$

أي: $6x(x - 1) = 0$

ومنه: $6x = 0$ أو $x - 1 = 0$

فنجد:

$$x = 0 \text{ أو } x = 1$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$6x$	-	0	+	+	
$x-1$	-	-	0	+	
$(6x)(x-1)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

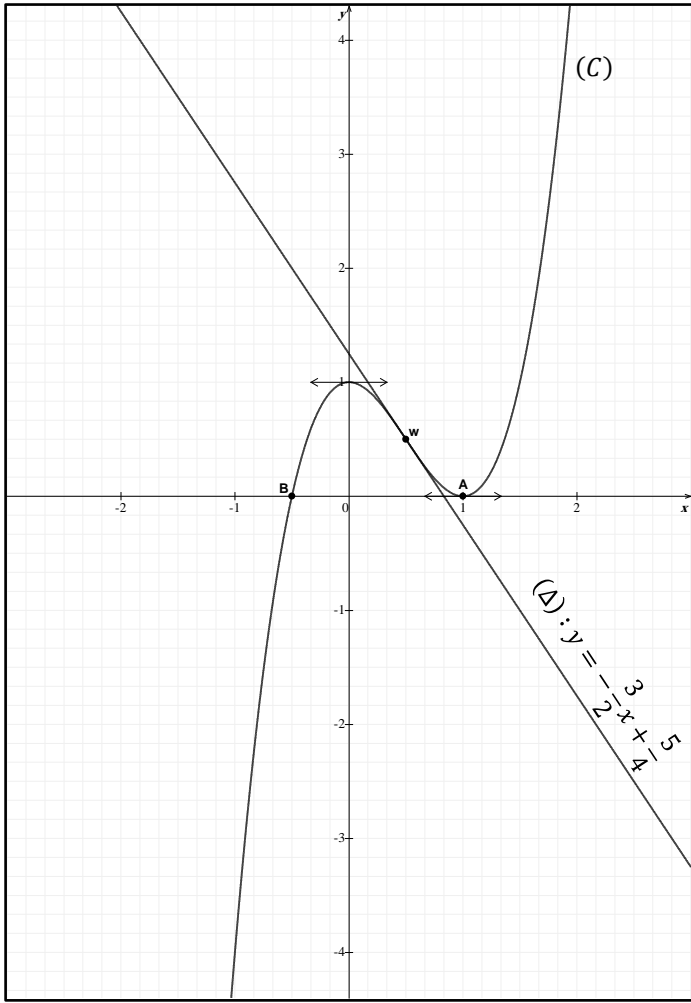
حيث:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

- الدالة f متناقصة تماما على المجال: $]0; 1[$

• نشكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	1	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

المنحنى الممثل للدالة f

(6) نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{1}{2}$:
تعطى معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 بالعلاقة التالية:

$$(\Delta) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

(7) ننشئ (C) و (Δ):• ل رسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

x	$\frac{1}{2}$	0
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $w(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ و $w'(0; \frac{5}{4})$.• ل رسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:- نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

$$B(-\frac{1}{2}; 0) \text{ و } A(1; 0)$$

- نقطة انعطاف المنحنى (C).

$$w(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

